Matériel pour l'oral 1 du CAPES Maths

TRIGONOMÉTRIE

Dany-Jack Mercier

15 octobre 2023

Table des matières

0.1 Un plan possible

Le plan suivant proposé le 12 janvier 2012 en oral sur la leçon *Trigonométri*e me paraît bon :

I. Trigonométrie dans le triangle rectangle
Introduire le cosinus comme en 4e, puis le sinus comme en 3e.

II. Utilisation d'un cercle trigonométrique
Enrouler la droite autour du cercle trigonométrique pour parler d'abscisse t d'un point M sur ce cercle. Définition de cette abscisse modulo 2π. Visualisation avec Geogebra. Définition des lignes trigonométriques $\cos t$ et $\sin t$ comme les coordonnées de $M(t)$ dans le repère qui définit le cercle trigonométrique. Définition de $\tan t$ et visualisation sur la droite des tangentes.

III. Mesure d'un angle
$\text{mes}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = t' - t$ où t et t' sont les abscisses curvilignes de M et M' points du cercle trigonométrique tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{OM}'$. Pour définir une telle mesure, on a besoin d'orienter le plan (i.e. tourner dans un sens dit positif sur le cercle trigonométrique).

IV. Applications
Calculs de distance & d'angles : formule d'Al Kashi, formule des sinus...

0.2 A ne pas rater

Sur la page Oral 1 du site MégaMaths, on trouvera un extrait du Chapitre 11 de mon livre *Géométrie du collège pour les matheux* [1] concernant la trigonométrie.

0.3 Simulation d'oral du 21 mai 2008

0.3.1 Introduction

Voici un exemple de séquence d'interrogation à partir d'une question assez éloignée du sujet. Les questions retranscrites ici, que j'ai posées lors d'une séance de simulation d'oral en mai 2008 sur une leçon intitulée « cocyclicité », donneront une idée de la façon dont le débat peut s'orienter suivant les réponses du candidat (ici une candidate).

Pour situer ce compte-rendu, il faut dire que la candidate a bien réussi à exposer son thème. Le tableau est bien disposé, bien écrit, les énoncés sont clairs, les dessins sont bien placés et utilisés à bon escient pour expliquer une démonstration... La diction est bonne. Ne riez pas, c'est TRES important ! Imaginez donc un candidat qui aurait des fèves dans la bouche ou qui parlerait en mastiquant un chewing-gum. Pensez-vous qu'il ait ses chances ?

Bon exposé, donc peu de questions sur celui-ci. La candidate a déjà engrangé des points essentiels, et il faut maintenant voir comment elle répond à des questions sur des sujets parfois plus périphériques...

Au niveau de la simulation, je donnerais seulement deux conseils :

- Premièrement : de parler deux fois plus fort pour être mieux entendue du jury. Ce point est TRES important : on parle distinctement et suffisamment fort pour montrer qu'on sera plus tard capable de parler à toute une classe !

- Deuxièmement : de se retourner beaucoup plus vers le jury, et de regarder alors la "globalité" de la salle, ainsi que les membres du jury, sauf s'ils intimident trop, auquel cas il vaut mieux enbrasser globalement la salle du regard, ce qui se fait très bien avec un peu d'entraînement.
Il est important de s'adresser directement au jury à certains moments de l'exposés, par exemple quand on donne des indications en étant très détaché vis à vis de ses notes. C'est le moment !

Ma première idée était de demander directement à la candidate de donner une démonstration de la symétrie du rapport de projection utilisant une cocyclicité. Posée ainsi, on comprend pourquoi la question intervient dans ce chapitre. On apprend aussi si la candidate connaît la définition d'un rapport de projection.
Mais j'ai finalement préféré partir d'une question plus éloignée, qui en a entraînée d'autres auxquelles je ne m'attendais pas ! Et la candidate non plus.

Dans cette transcription, je placerai des remarques et des commentaires entre crochets pour donner des idées sur les motivations réelles du jury et sa façon de réagir, et par la même, permettre de comprendre ses réactions et répondre autant que possible à ses attentes.

0.3.2 Suite de questions enchaînées

Jury : Connaissez-vous la façon dont on introduit le cosinus d'un angle en classe de quatrième ?

Candidat : Pas vraiment...

Jury : Auriez-vous une idée quelconque permettant de définir le cosinus en quatrième ?

Candidat : Oui. Je peux dessiner un triangle ABC rectangle en A, et poser $\cos\theta = AB/AC$ où θ est l'angle aigu $\widehat{BAC}$. *[Le dessin est fait à main levée au tableau.]*

Jury : Avez-vous ainsi défini le cosinus d'un angle aigu ? N'y-a-t-il pas une difficulté à soulever quand on considère la définition que vous avez proposée ?

Candidat : Je ne vois pas...

Jury : On désire définir le cosinus d'un angle aigu, et vous nous parlez d'un certain triangle rectangle... Et puis d'abord, on désire définir le cosinus d'un angle de quoi ?

Candidat : ?...

Jury : Un cosinus d'angles de demi-droites, ou de vecteurs non nuls. En quatrième, on se limite aux cosinus d'angles aigus de deux demi-droites.
Ici, il faut absolument vérifier que, étant données deux demi-droites d, d' de même origine O et formant un angle aigu, la définition que vous proposez est indépendante du choix d'un triangle rectangle que l'on imbriquerait dans la figure. Votre définition est juste, si l'on arrive à démontrer qu'elle ne dépend QUE des deux demi-droites !

Je vous demande donc de tracer deux deux demi-droites d, d' d'origine O, de choisir un point A sur d, de tracer le projeté B de A sur le support de d'. Que doit-on faire ensuite ? *[Le jury laisse au candidat la possibilité de continuer.]*

Candidat : ?...

Jury : On choisit un autre point A' sur d, on le projette orthogonalement en B' sur d, et dans un premier temps, on vérifie que le cosinus de $\theta = (d, d')$, tel qu'on veut le définir, est indépendant du choix des points A et A' sur d. Complétez le dessin...

Candidat : Voilà... Ah ! Là c'est facile. Le théorème de Thalès nous donne justement l'égalité des rapports OB/OA et OB'/OA'.

Jury : Ce n'est pas fini pour autant. Connaissez-vous les rapports de projection de deux demi-droites ?

Candidat : J'en ai entendu parlé, mais là je ne vois pas...

Jury : Dans la situation qui nous intéresse *[celle où les deux demi-droites forment un angle aigu $\theta = (d, d')$, sinon il faut mettre des mesures algébriques]*, le rapport de projection de d sur d' est le rapport OB/OA. Ce rapport est aussi appelé cosinus de (d, d'), et noté $\cos\theta$.
Mais il faut encore prendre des précautions ! Pour pouvoir définir ce cosinus, il faut être certain qu'une autre personne, en suivant notre définition, qui choisit un point C sur l'une des deux demi-droites, le projette en D sur l'autre demi-droite, et s'écriant : le cosinus de θ est OD/OC, trouve la même chose que nous. Il faut donc vérifier la symétrie du rapport de projection, c'est-à-dire que

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}.$$

[En effet, si l'on note $r(d, d') = OB/OA$, l'égalité précédente signifie que $r(d, d') = r(d', d)$ et donc que le rapport de projection est indépendant de l'ordre dans lequel on considère les demi-droites. On peut alors parler de "rapport de projection d'un couple non ordonné de demi-droites.]

Candidat : Ca me revient un peu...

Jury : Voici une dernière question. En regardant votre figure (FIG. 1), pouvez-vous déceler une cocylicité ?

Candidat : Oui ! Les points A, B, C, D sont cocycliques car on a deux triangles rectangles ABC et ACD de même hypoténuse $[AC]$.

Jury : Il ne vous reste plus qu'à utiliser cette cocyclicité pour démontrer l'égalité des rapports.

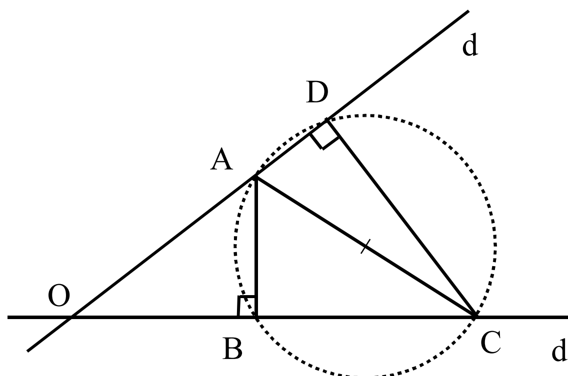


FIG. 1 – Symétrie du rapport de projection et cocyclicité

Candidat : ? ...

Jury : Que faire du point O et du cercle $\mathcal{C}$ sur la figure ?

Candidat : Ce doit être... la puissance d'un point par rapport à un cercle. La puissance de O par rapport à $\mathcal{C}$ est égale à OA/OD, ...

Jury : Vous voulez dire $\overline{OA} \times \overline{OD}$ avec des mesures algébriques...

Candidat : Oui. Donc j'obtiens $\overline{OA} \times \overline{OD} = \overline{OB} \times \overline{OC}$, d'où l'égalité de rapports $OB/OA = OD/OC$.

Jury : On pourrait maintenant essayer de parler des rapports de projections de deux-demi-droites formant un angle quelconque, mais nous allons passer à autre chose. Dites-moi, pensez-vous qu'il soit nécessaire d'orienter le plan pour parler du théorème de l'angle inscrit ? (...)

> Tout ce qu'il faut savoir sur les rapports de projection et la définition du cosinus d'un angle aigu au collège se trouve dans un des chapitres du livre *Géométrie du collège pour les matheux* [1].

0.3.3 D'autres questions

L'exposé ayant été très bon, je pose des questions sur les prérequis annoncés. Dans ceux-ci, on lit en particulier : Angles orientés de demi-droites ou de droites, mesure d'un angle, relation de Chasles, somme des angles d'un triangle.

On peut facilement demander des précisions sur tous ces présupposés acquis. Il y a les sampiternelles questions : Qu'est-ce qu'un angle ? Doit-on orienter le plan ? Qu'est-ce qu'une rotation ?

0.3.4 Réaction d'Emmanuel

Je viens de recevoir un courrier d'Emmanuel qui s'interroge sur cette simulation, et dont les questions me semblent intéressantes. Voici ce qu'il écrit :

Emmanuel — J'ai bien sûr savouré ce nectar « simulation d'oral sur la cocyclicité / symétrie du rapport de projection », mis en ligne récemment sur MégaMaths. A propos du cosinus d'un angle aigu en 4ème :

1) Dans le cas des triangles rectangles croisés, vous résolvez le problème grâce à la puissance d'un point à rapport à un cercle. Y-a-t-il une démonstration accessible en 4e ? Sinon, faut-il ignorer le problème face aux élèves ? Face au jury ?

2) Il reste un problème, celui de l'égalité des mesures de deux angles géométriques différents. Yves Chevallard, professeur à l'université d'Aix-Marseille, propose dans excursus n°4 (glané sur le net), l'existence d'une isométrie pour passer d'un angle à l'autre, décomposée par les symétries axiales (qui engendrent ce groupe). Faut-il pointer cette difficulté face au jury, sans trop s'exposer sur le groupe des isométries ? Y. Chevallard fait-il autorité en didactique (le ton est parfois à la controverse) ?

Ma réponse — Je suis content que ce rapport de simulation d'oral vous ait plu. L'objectif d'un tel rapport est, effectivement, de nous faire réagir et vibrer sur ces thèmes mathématiques, pour arriver à mieux les cerner, les comprendre puis les expliquer. Je vais donc « vibrer » à partir de vos questions :

1) Je suppose que les triangles rectangles croisés dont vous parlez sont ceux du rapport de projection. Dans ce cas la puissance d'un point par rapport à un cercle fonctionne bien, mais n'est pas la seule méthode, comme on s'en doute. On peut montrer la symétrie du rapport de projection en utilisant une réflexion et le théorème de Thalès, ce qui est plus approprié en 4e.

2) Les angles géométriques peuvent être vus comme des classes d'équivalence de couples de demi-droites de même origine pour la relation suivante : (d, d') et (l, l') sont en relation si et seulement si une même isométrie affine fait passer de d à d', et de l à l'.

Je ne conseille pas de pointer cette difficulté devant le jury, car le rapport de projection permet de construire une relation d'équivalence qui définit aussi les angles géométriques, et que le dire ou le sous-entendre suffira dans une leçon dont le libellé porte sur les projections orthogonales sur une droite.

3) Je pense que Y. Chevallard fait autorité en didactique, mais que, chacun ayant aussi son approche et ses sensibilités, il existe et existera toujours des façon différentes de ressentir, dire et vivre les mathématiques et leur enseignement. Pour ce qui nous concerne, Y. Chevallard a tout à fait raison d'insister

sur les isométries affines planes, qui ne sont que des composées de réflexions d'après le théorème de Cartan-Dieudonné, pour nous donner une définition rigoureuse des angles géométriques.

0.4 Compte rendu d'oral de Stéphane

Voici le compte rendu de Stéphane qui a passé ses oraux du CAPES externe 2012. En oral 1, il choisit la leçon intitulée *Trigonométrie.* Voici son plan :

I) Au collège : cosinus, sinus, tangente et quelques propriétés.

II) Au lycée : cercle trigonométrique, mesure en radian, angle orienté de vecteurs (ce qui est vu au lycée, pas la vraie définition), définitions du cosinus et du sinus d'un réel, d'un angle orienté de vecteurs, propriétés, formules d'addition, de duplication... (le candidat a pressé le cercle trigonométrique comme un citron).

III) Applications - Deux classiques :
- Construction du pentagone régulier par le calcul de $\cos 2\pi/5$
- Dérivabilité des fonctions cosinus et sinus.

Les 15 min de présentation sont trop courtes pour une telle leçon. Stéphane condense au maximum et tient juste le temps imparti. Le jury lui demande de démontrer la formule donnant $\cos(a+b)$. Il leur propose une démonstration géométrique, avec le cercle trigonométrique et Thalès, sans le produit scalaire. Stéphane s'emmêle un peu les pinceaux mais arrive à ses fins. Il évoque la démonstration qui utilise le produit scalaire et qui permet d'éviter d'envisager plusieurs cas de figure.

La deuxième question porte sur la justification des définitions des cosinus et sinus d'un angle aigu au collège. Stéphane répond correctement, mais le jury lui dit qu'il n'avait pas à démontrer certaines choses, ce qui surprend le candidat qui avait travaillé cette justification en classe.

Stéphane a ensuite droit à de nombreuses questions assez basiques : connaissez-vous d'autres relations faisant intervenir le cosinus d'un angle ? (Al-Kashi) Quelle est la relation de Chasles pour les angles orienté de vecteurs ? On parle de la formule d'Al Kashi, et ainsi de suite, mais chaque fois que Stéphane répond, le jury passe à une autre question. Ah ! Stéphane se trompe en disant que les fonctions cosinus et sinus d'un angle aigu était abordés en 3e alors que c'était en 4e mais peu importe. Le jury ne s'est intéressé à aucune des applications proposées, et Stéphane est sorti de cette leçon pas vraiment déçu mais avec un goût d'inachevé. Qu'en pense donc le jury ?

Le candidat estime avoir répondu à de nombreuses questions, et s'étonne de ce que le jury passe à chaque fois très rapidement à une autre question. C'est pourtant un bon signe qui prouve que vous avez répondu de façon suffisante, et que votre réponse et vos connaissances à ce sujet ont été validées. Le jury ne s'est pas intéressé aux deux applications proposées : ce n'est pas grave. Il a décidé de vérifier que certains autres points étaient acquis, car il s'agissait de points capitaux. Peut-être n'avait-il tout bonnement pas envie de parler de ces exercices, disposant de suffisamment de questions sur le reste de la leçon pour tenir 30 minutes et dresser une carte convenable de leur candidat.

0.5 Dans des manuels de collège

L'énoncé direct du Théorème de Thalès dans le triangle est proposé pour la première fois en quatrième, et l'étude de cet énoncé est immédiatement suivi par l'introduction du cosinus d'un angle droit d'un triangle rectangle.

Des activités diverses permettent de conjecturer que certains rapports de distance restent égaux, puis on démontre cette conjecture en utilisant le Théorème de Thalès, pour appeler enfin cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle le rapport du côté adjacent sur l'hypoténuse.

A ce niveau, l'angle aigu est attaché au triangle, ce qui ne pose pas de problème. Mais que répondra un candidat au CAPES si le jury lui fait remarquer que l'on a ainsi défini le cosinus d'un angle aigu d'un angle d'un certain triangle rectangle particulier, et de lui expliquer pourquoi cette définition est en fait aussi celle du cosinus d'un angle aigu quelconque (sans lien avec un quelconque triangle rectangle déjà tracé) et que cela a un sens (donc donne le même résultat quel que soit l'endroit où l'on a représenté l'angle par deux demi-droites de même origine) ?

La question n'est pas bien méchante puisqu'il suffira d'expliquer que des angles géométriques de demi-droites sont égaux si, et seulement si, il existe une isométrie qui fait passer du premier couple de demi-droites au second, et que dans ce cas, la construction de triangles rectangles ad hoc permettant de définir le cosinus donne le même résultat, puisqu'une isométrie conserve l'orthogonalité et les distances ! Nous voilà tirés d'un mauvais pas à l'oral. Mais pas d'inquiétude, je ne pense qu'il y a peu de chances pour que l'on pose une telle question si l'on tombe sur cette leçon à l'oral.

Pour préparer sa leçon d'oral, n'oublions pas d'utiliser les livres de 4e et de 3e à notre disposition pendant le temps de préparation de l'exposé, pour y puiser un exercice sur tableur ou quelques énoncés d'applications immédiates du théorème de Thalès et du cosinus.

La FIG. 2 montre un exercice d'application bien intéressant sur les lentilles convergentes proposé dans le manuel *Prisme 4*ᵉ (programme 2009). On peut le proposer en ne retenant que les questions 2.a, b et c et en proposant un dessin épuré au tableau ou sur open office.

Les exercices de calculs de distances sont légion dans les manuels de collège, et montrent que l'utilité principale des théorèmes de thalès et de Pythagore, comme de l'introduction des sinus et cosinus, est **le calcul des longueurs**, et en particulier celui des longueurs inaccessibles. On sait donc quoi répondre si un membre du jury nous demande à quoi sert le cosinus...

85 Mobiliser ses connaissances

Le foyer d'une lentille est le point où se concentre l'énergie issue d'une source lumineuse lointaine comme le Soleil. Une lentille convergente est caractérisée par son axe de symétrie appelé **axe optique**, et par sa **distance focale** *f*, égale à la distance entre le **foyer** F et le **centre** O de la lentille.

1. On considère le rayon lumineux 1 parallèle à l'axe optique. La déviation occasionnée par la lentille sur ce rayon peut-être évaluée par l'angle $\widehat{OFH_1}$.
a. On considère les rayons lumineux 1, 2, 3 et 4. Les ranger du moins dévié au plus dévié par la lentille.
b. Écrire la relation entre la distance focale *f* de la lentille, la longueur du rayon $[H_1F]$ et l'angle $\widehat{OFH_1}$.
2. Une lentille convergente forme une image **inversée** d'un objet lumineux sur un écran lorsque la distance objet-lentille D est supérieure à la distance focale *f* (voir figure ci-après).
On donne : AB = 10 cm et *f* = 15 cm.
a. Calculer la longueur HF. Arrondir au mm.
b. En déduire une valeur approchée à 0,1° près de la mesure de l'angle de déviation $\widehat{OFH}$.
Quelle est alors la mesure de l'angle $\widehat{A'FB'}$?
c. Calculer une valeur approchée au mm près de la longueur FB', puis en déduire la taille A'B' de l'image inversée de l'objet, lorsque la distance FA' = 10 cm.

86 Chercher l'information

1. Les scientifiques d'aujourd'hui pensent-ils que la légende d'Archimède est vraisemblable ?
2. Quelle est l'étymologie du mot « foyer » ?
3. Pourquoi en optique ce mot indique-t-il un point de **convergence** des rayons lumineux ?
4. La propriété des verres et des miroirs ardents est-elle encore utilisée de nos jours ?

87 Découvrir le métier d'opticien(ne)-lunetier(ière)

1. Quelles sont les compétences requises pour cette profession ?
2. En quoi consiste le travail d'un opticien ?
3. Quelle est la formation permettant d'accéder à ce métier ?

onisep
Je découvre le métier d'opticien(ne)-lunetier(ière) : www.onisep.fr

FIG. 2 – Exercice 85 du *Prisme 4*ᵉ (programme 2009)

Bibliographie

[1] D.-J. Mercier, Géométrie du collège pour les matheux, CSIPP, 2014.